D'acord amb ço que diguérem en la darrera conferència, insistirem breument sobre l'anàlisi que permet arribar al teorema de Poincaré (*) sobre les equacions diferencials de primer ordre, algèbriques respecte a y, y' i analítiques respecte a x, la integral de les quals no té punts de ramificació paramètrics (és a dir, dependents de la constant arbitrària y_0).

Siguin y_0, y'_0 les valors inicials (per a $x = x_0$) de y, y', que satisfan a

$$f(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

Tindrem

$$f(x_0, y_0, y'_0) = 0. \qquad (2)$$

Imaginem un camí L, fixat per a d'aquí endavant, que enllaça els punts x_0 i x, arc de corba que no passi pels punts crítics, que suposem fixes.

(Com ho veurem més endavant, aquí és quan intervé la nostra hipòtesi sobre els punts crítics.)

En considerar (1) i (2) com les equacions de dues corbes, hom veu que hi ha entre llurs punts una correspondència biuniforme: a cada punt y_0, y'_0 de l'una correspon un punt ben determinat y_0, y'_0 de l'altra i inversament,

---

(*) *Acta Mathematica*, vol. VII, 1885. *Sur un theorème de Mr. Fuchs.* V. també Picard, *Traité d'Analyse.*

en virtut del teorema fonamental (car, per la hipòtesi, no hi ha mai punts crítics per a y en nostre camí L).

La transformació és biuniforme: les equacions (1) i (2) són racionals en y_0, y'_0; y, y', respectivament. Aquí intervenen aquells principis de la teoria de funcions analítiques, dels quals havem parlat en la primera conferència i dels quals es manifesta així tota la potència. Demostren que, essent biuniformes, les fórmules de transformació entre y_0, y'_0 i y, y' seran consegüentment, biracionals.

¿Quantes correspondències biracionals pot haver-hi entre dues corbes donades? Això depèn del gènere: si és superior a un, n'hi ha un nombre limitat; si el gènere es zero o un, n'hi ha una infinitat. En el primer cas, hom pot determinar aquestes transformacions biracionals amb càlculs purament algèbrics.

Efectivament: siguin

$$\int \varphi_1(x,y,y')\,dy, \; \ldots\ldots, \; \int \varphi_p(x,y,y')\,dy$$

les p integrals abelianes de primera espècie relatives a l'equació

$$f(x,y,y')=0.$$

Amb la transformació biracional, l'existència de la qual havem demostrat, les precedents integrals abelianes esdevindran integrals en y_0, y'_0.

Una integral abeliana de primera espècie com aquesta podrà expressar-se linealment mitjançant

$$\int \varphi_1(x_0,y_0,y'_0)\,dy_0 \; \ldots\ldots, \; \int \varphi_p(x_0,y_0,y'_0)\,dy_0.$$

De consegüent:

$$\varphi_1(x,y,y')\,dy = \left[A_1\varphi_1(x_0,y_0,y'_0) + \ldots\ldots + A_p\varphi_p(x_0,y_0,y'_0)\right] dy_0;$$

i també:

$$\varphi_2(x,y,y')dy = \Big[B_1\varphi_1(x_0,y_0,y'_0) + \ldots\ldots + B_p\varphi_p(x_0,y_0,y'_0)\Big]dy_0.$$

En dividir-les, obtenim la transformació entre y, y' i y_0, y'_0.

$$\frac{\varphi_1(x,y,y')}{\varphi_2(x,y,y')} = \frac{A_1\varphi_1(x_0,y_0,y'_0) + \ldots + A_p\varphi_p(x_0,y_0,y'_0)}{B_1\varphi_1(x_0,y_0,y'_0) + \ldots + B_p\varphi_p(x_0,y_0,y'_0)},$$

en la qual $A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_p$ es determinaran en funció de x, de manera que la transformació sigui biracional.

Tindrem així un nombre finit de sistemes de valors de les A i B funcions de x.

Escriurem, doncs,

$$y = R(y_0, y'_0, x, x_0)$$
$$y' = R'(y_0, y'_0, x, x_0);$$

essent les R racionals, i, demés, R' la derivada de R respecte a x.

La integral general

$$y = R(y_0, y'_0, x, x_0)$$

es determina, doncs, algèbricament, i és una funció algèbrica dels coeficients de y i y' en

$$f(x,y,y') = 0.$$

Hom veu clarament que tot el raonament suposa la no existència de punts crítics dependents de x_0, y_0, y'_0, car en tal cas no poden considerar-se y i y' com a funcions de y_0, y'_0, perquè els punts crítics, per a valors convenients de y_0, y'_0, es trobarien tot justament en l'arc de la corba integral.

El cas en què $p=o$ es reconeix fàcilment.

Mentre la corba $f(x, y, y')$ és de gènere zero en y, y', aquestes dues quantitats poden expressar-se en funció racional d'un paràmetre, tal com t. Com que y' és la derivada de y, hom en dedueix una relació diferencial entre t i x, on la derivada t' és una funció de segon ordre en t, essent els coeficients independents de x. Es una equació de Riccati.

Si el gènere de la corba és igual a 1, les y i y' poden expressar-se racionalment com a funcions uniformes doblement periòdiques d'un paràmetre. Hom demostra aleshores que, per al cas que ens interessa en què la funció f ès algèbrica respecte a y i y', s'arriba a la integral general per transformacions algèbriques o per una quadratura.

Es cosa ben palesa que el mètode té per fonament essencial la consideració de la constant d'integració y_0, és a dir, la consideració *simultània* de les diverses solucions.

Tals són les conquestes de Poincaré en les vies que s'obrien al seu davant. Però ell n'ha obert d'altres, enterament o quasi enterament noves, en aportar a l'estudi de les equacions diferencials el mètode que podríem anomenar *qualitatiu* i que troba son paral·lel en l'estudi d'una equació algèbrica.

En aquest estudi, efectivament, els teoremes com el de Sturm, la teoria de les característiques de Kronecker, permeten un estudi del nombre i disposició de les arrels: després ve el càlcul numèric més o menys aproximat, ço que ve a constituir el mètode quantitatiu.

En l'estudi d'una corba, en geometria analítica, es cerca, primer, si té branques infinites, closes, etc..., i després se'n calculen un cert nombre de punts.

La part qualitativa de les corbes definides per una equació diferencial ha estat desenrotllada per Poincaré en quatre cèlebres memòries (*Journal de Liouville*, 1881 i següents), on examina la forma general d'aquestes corbes.

Aquestes memòries són les que passarem en revista ràpidament.

El punt de vista de Poincaré, que és de la més gran importància en moltes qüestions de Mecànica, com, per exemple, la de l'estabilitat, havia estat ben descuidat pels seus predecessors.

Cal assenyalar, no obstant, algunes excepcions: tals són el teorema de Lagrange-Dirichlet sobre l'estabilitat de l'equilibri, els treballs de Sturm sobre la distribució dels zeros d'una equació diferencial lineal de segon ordre, que Böcher ha generalitzat, i el teorema de Liouville, del qual parlarem més endavant.

Però aquests treballs restaren isolats i estèrils: arribaven a un moment en què la teoria de funcions analítiques es manifestava extremadament fecunda i, fins i tot, prodigiosa, i els analistes, enlluernats, no podien veure com hauria estat útil de no tancar-s'hi i d'abordar també el domini real.

Fou, doncs, un mèrit singular de Poincaré de posar-se a lluitar amb dificultats immenses, de prescindir de totes les conquestes precedents i de crear els mètodes que havien de servir-li, i de procurar-se els mitjans eficaços que calia emprar, car l'instrument meravellós de la teoria de les funcions analítiques no li servia.

Veurem tot seguit que la seva idea fonamental és la que abans hem recalcat: la d'estudiar en bloc les relacions de les solucions unes amb altres, de considerar-les en llur conjunt.

Començarem pel cas més senzill; X i Y són dos polinomis enters en x, y, i considerem les corbes planes definides per

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}.$$

Es projectaran aquestes corbes sobre la superfície d'una esfera des del seu centre. Hom té així l'aventatge d'estudiar-les sobre una superfície closa sense límit.

Si no és a l'ensems $X = Y = o$, per cada punt passa una sola corba integral: les corbes solucions formen una família, de la qual dues corbes qualssevulga no incideixen.

Si posem

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = dt,$$

on t representa un temps, el pendrem en el sentit de l'esdevenidor.

En un punt qualsevol de l'esfera hom pot traçar una fletxa sobre el pla tangent en aquest sentit, posat que el punt no sigui singular. L'equació precedent defineix una espècie de moviment, i en aquests punts la velocitat és nul·la.

Per a conèixer la forma de les corbes definides per l'equació diferencial, a Poincaré li cal fer primerament l'estudi local entorn dels punts singulars.

Suposem que $x = y = o$ és un punt singular: aleshores X, Y comencen per termes de primer grau.

Un canvi de variables, en introduir les noves variables ξ, η, permet reduir les equacions a la forma

$$\frac{d\xi}{\lambda_1 \xi + \ldots} = \frac{d\eta}{\lambda_2 \eta + \ldots} = dt,$$

essent constants les λ_1, λ_2, i arrels d'una equació de segon grau, fàcil de formular, els coeficients de la qual depenen dels que intervenen en els termes de primer grau en X i Y.

Aquí s'imposa una discussió per a esbrinar ço que passa en els diversos casos que poden presentar-se segons la naturalesa i el sigue de les arrels λ_1 i λ_2.

Si són reals i del mateix signe, hom pot (canviant, si cal, el signe de t) suposar-les negatives: les corbes integrals s'atansen a l'origen, i hi arriben amb una tangent determinada. L'origen és un *nus*, a la manera del pol on les línies de força tendeixen a convergir, o a la manera com les línies de pendent surten d'un cim o van a parar a una fondalada. Això es reconeix immediatament, car, per a valors molt petits de ξ, tenim

$$\frac{d\xi}{dt} = -\lambda_1 \xi \quad ; \quad \frac{d\eta}{dt} = -\lambda_2 \eta .$$

Són trajectòries, la velocitat de les quals va minvant amb la distància a l'origen, ξ disminueix amb el temps, i el mòbil tendeix a apropar-se a l'origen amb velocitat nul·la. S'hi arriba, doncs, dirigint-s'hi de qualsevol punt.

Si les λ són positives, no cal sinó parlar d'allunyament en lloc d'apropament.

Si les λ_1 i λ_2 són de signes contraris, restant reals, les ξ creixen quan les η disminueixen. L'origen no és accessible, excepció feta de dues corbes tangents en l'origen als dos eixos $\xi = o$, $\eta = o$. L'origen és un *coll*.

Si λ_1 i λ_2 són imaginaris conjugats, hom pot distingir dos casos segons que la part real sigui diferent de zero o igual a zero.

En aquest últim cas, que és excepcional, arribem a ço que hom anomenaria *un centre*, del qual ens ocuparem en la vinent conferència.

Suposant que la part real no és nul·la, posem

$$\xi = x + iy$$
$$\eta = x - iy$$

i tindrem

$$\frac{dx}{ky + hx + \ldots} = \frac{dy}{-kx + hy + \ldots}$$

Si el mòdul de les λ és diferent de 1, les corbes seran espirals logarítmiques que arriben a l'origen asimptòticament i sense tangent determinada. L'origen és un *focus*. Les corbes presenten l'aspecte de les línies de corrent en un remolí.

Hom ha estudiat així els punts singulars ordinaris. Tots els resultats precedents semblen bons en primera aproximació, és a dir, quan es redueixen X i Y a llurs termes de primer ordre. Per demostrar que subsisteixen quan es tenen en compte els termes d'ordre superior, Poincaré utilitza els teoremes de la teoria de funcions analítiques continguts en sa Tesi. Es preferible, en ma opinió, no introduir variables imaginàries i les propietats de les funcions analítiques; i hom pot, efectivament, operar directament mitjançant un principi, del qual veurem també l'aplicació constant per Poincaré i que forma ensems la base de les recerques que aquest assumpte ha inspirat més tard a Liapounoff.

Imaginem una corba sobre l'esfera, tal com $F(x,y) = 0$: separarà una regió on $F(x,y) > 0$ d'una altra on $F(x,y) < 0$.

Tota corba solució de

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = dt$$

que té un punt comú amb $F(x,y) = 0$, si no és tangent, és que passa d'una regió a l'altra. Hom reconeixerà el sentit del passatge pel signe de

$$X\frac{\partial F}{\partial x}+Y\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Si aquest signe és constant, $F(x,y)=o$ serà anomenada *una corba sense contacte;* ço que s'aplica també a un arc de corba limitat.

En l'estudi precitat dels punts singulars, aquest principi, amb una elecció convenient de la funció F, permet completar, com hem dit, els resultats de la primera aproximació.

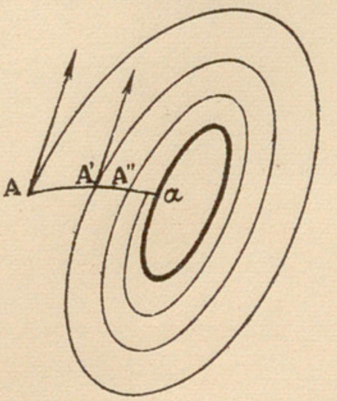
Entre els casos excepcionals, alguns condueixen a les mateixes conclusions; altres exigeixen un nou estudi.

I, a part els punts singulars, ¿què s'esdevindrà per a les corbes integrals?

No sabem sinó una cosa: és que les corbes solucions traçades sobre una superfície limitada no poden incidir.

Aquest únic i senzill principi és suficient a Poincaré per a establir son resultat fonamental.

A aquest fi, observem que, fent-se el moviment en un domini limitat, caldrà que posicions molt llunyanes en el temps siguin molt pròximes en l'espai. La corba ha de retornar a una posició molt próxima a la primitiva. Es aquí, precisament, que Poincaré la sotja.



Tracem el petit arc $A\,A'$ sense contacte que uneix aquestes dues posicions.

Aleshores les corbes que penetren en la corba closa així formada queden agafades dintre com en una ratera. No poden tallar la corba; no poden tampoc travessar $A\ A'$.

La corba retornarà a un nou punt A'' de l'arc.

Aquests punts són dits, per Poincaré, ***conseqüents***, cada un del precedent. Però això no pot continuar indefinidament: les A tindran un punt límit α, que serà son propi conseqüent, és a dir que la línia que surt de α retorna a α.

Resulta, doncs, que, si la corba integral no troba un punt singular i no és asimptòtica a un focus, caldrà que s'enrotlli entorn d'una corba closa que s'anomena *cicle límit*.

Prenguem un punt de l'arc AA' sense contacte, més enllà del punt α. La corba integral que passa per aquell punt es trobarà en condicions anàlogues; de la qual cosa es dedueix que tindrà el mateix cicle límit com a corba asímptota, que resulta així ser-ho per a dos sèries de corbes, unes interiors i altres exteriors.

En una àrea anular entorn del cicle límit hom pot traçar una infinitat de cicles sense contacte (perquè Poincaré anomenava *cicle* tota corba closa sobre l'esfera).